昨年に続いて，「MEDiCの指導の一端」を御紹介する意味で，本年度の入試問題を題材に「入試問題とMEDiCテキストとの相関性」・「教務スタッフの取り組み」。そして，「高等進学塾グループ指導の一端」を御紹介したいと思います。

なお，今回は愛知医科大学・昭和大学・近畿大学の問題を取り上げています。愛知医科大学は試験会場に掲示されていた入試問題を拝見し，近畿大学は問題の持ち帰りができるため，生徒から問題を見せてもらいました。昭和大学については，受験した生徒から問題の聞き取りを行いました。よって，実際の入試問題とは問題文が異なるかと思われます。

2012年度：愛知医科大学（大問Ⅰ）

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=15$，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ を満たす多項式 $f(x)$のうち，その次数が最小となるものを求めよ。

解説

$\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ より，有限確定値を持つためには，$f(x)$ の次数は 2 以上であり，$f(-1)=0$，$f(2)=0$ であることが必要である。

$f(x)$ の次数が 2 であるとき，$f(x)=p(x+1)(x-2)$とおける。

このとき，

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{p(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}p(x-2)=15 \text{ より，} -3p=15 \Leftrightarrow p=-5$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{p(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}p(x+1)=15 \text{ より，} -3p=15 \Leftrightarrow p=5$$

となるが，p の値が一致しないので不適である。

$f(x)$ の次数が 3 であるとき，$f(x)=(px+q)(x+1)(x-2)$とおける。

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(px+q)(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(px+q)(x-2)=15 \text{ より，}$$

$-3(-p+q)=15 \Leftrightarrow p-q=5$ …①

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(px+q)(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(px+q)(x+1)=3 \text{ より，}$$

$3(2p+q)=3 \Leftrightarrow 2p+q=1$……②　①，②より，$p=2$，$q=-3$

よって，$f(x)$ の次数が最小となるのは，$f(x)=(2x-3)(x+1)(x-2)$ である。……答

ポイント

本年度の愛知医科大学の中では最も取り組みやすい問題だと思います。$\dfrac{0}{0}$の不定形がポイントであり，参考書や問題集でも数多く掲載されている問題です。「多項式 $f(x)$ で次数が最小となる」という文章で戸惑った人もいたようですが，上の解答のように次数が 2 のとき，次数が 3 のときと段階を追って解いていけば大丈夫です。どの予備校でも学習していると思いますが、MEDiC でもテキストに掲載をしています。

MEDiC テキスト（力の泉：数ⅡB 56ページ）

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$，$\displaystyle\lim_{x\to-2}f(x)=0$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

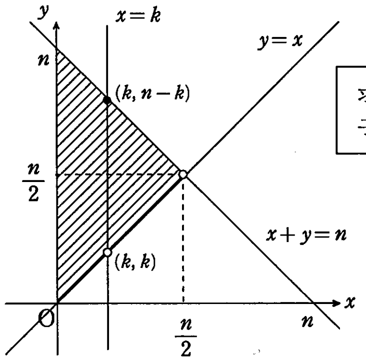
2012年度：愛知医科大学（大問Ⅳ）

3 以上の自然数 n について，和が n 以下になる異なる 2 つの自然数の組み合わせの総数を，(i)　n が奇数のとき　(ii)　n が偶数のときに分けて n で表せ。

解説

異なる 2 つの自然数をそれぞれ x, y $(x<y)$ とする。

問題文より，$\boxed{x+y\leqq n,\ x<y,\ x>0,\ y>0}$ が条件となる。この条件を座標平面で表すと下の斜線部のようになる。（ただし，y 軸および$y=x$ は境界を含まない）



求める組み合わせ総数は，斜線部における格子点の個数を考えればよい。

(i)　n が奇数のとき

y 軸に平行な直線 $x=k\left(k=1, 2, 3, \cdots\cdots, \dfrac{n-1}{2}\right)$ 上における格子点の個数は

$(n-k)-k=n-2k$（個）であるから，

注意　点(k, k) は格子点ではないので，$n-2k+1$（個）ではない！

求める格子点の個数は，

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)=n\cdot\frac{n-1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{2n(n-1)-(n-1)(n+1)}{4}$$

$$=\frac{2n^2-2n-(n^2-1)}{4}=\frac{n^2-2n+1}{4}=\frac{(n-1)^2}{4}\ \cdots\cdots\text{答}$$

(ii)　n が偶数のとき

同様に，$x=k$ 上における格子点の個数は $n-2k$（個）であるが，k の範囲が $k=1$，2，3，……，$\dfrac{n-2}{2}$ になるので，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(n-2k)=n\cdot\frac{n-2}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{2}+1\right)$$

$$=\frac{n(n-2)}{2}-\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{2n^2-4n-n^2+2n}{4}=\frac{n^2-2n}{4}=\frac{n(n-2)}{4}\ \cdots\cdots\text{答}$$

ポイント

2 つの自然数の組み合わせの総数を答えることから，「格子点の問題」として解答を作成しました。問題文の条件を数式化することで，「$x+y\leqq n$，$x<y$，$x>0$，$y>0$ の領域における格子点の個数を求める」という問題になります。

格子点の問題としては標準的なレベルになりますので，格子点に苦手意識のない生徒でしたら「完答」も十分可能になると思います。格子点を用いた解き方を説明すると，とても悔しがっている生徒もいました。今年のMEDiCのテキストでは，標準的な格子点の問題から，「数式化を必要とする格子点の問題」も収録していました。

MEDiC テキスト（力の泉：数ⅡB 192 ページ）

座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点$(x,\ y)$を格子点という。

(1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq 20$ を同時に満たす格子点$(x,\ y)$の個数を求めよ。

(2)　$y\geqq 0$，$y\leqq 2x$，$x+2y\leqq 20$ を同時に満たす格子点$(x,\ y)$の個数を求めよ。

MEDiC テキスト（後期テキスト：数ⅠAⅡB　第 9 講　163 ページ）

k を自然数とするとき，各数が k よりも小さく，和が k よりも大きくなるような，異なる 2 つの自然数の個数を a_k とする。

(1)　a_7，a_8 を求めよ。

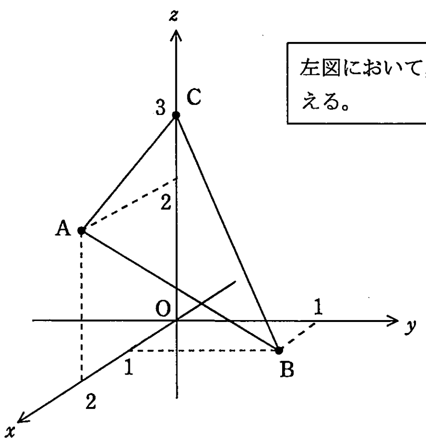
(2)　n を自然数とするとき，a_{2n-1}，a_{2n} を n の式で表せ。

(3)　n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k$ を n の式で表せ。

2012年度：愛知医科大学（大問Ⅴ）

空間の座標内に A(2, 0, 2), B(1, 1, 0), C(0, 0, 3) がある。△ABC を z 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

解説

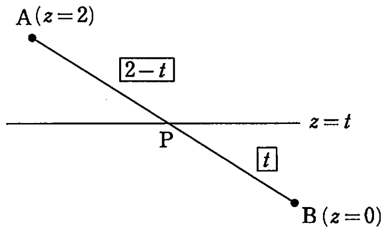


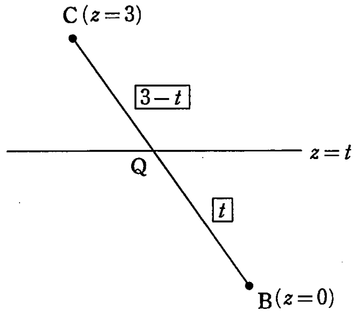
左図において，平面 $z=t$ による切断面を考える。

$0 \leqq t \leqq 2$ においては，平面 $z=t$ は線分AB，CB と交わり，$2 \leqq t \leqq 3$ においては平面 $z=t$ は線分AC，CB と交わる。よって，$0 \leqq t \leqq 2$ と $2 \leqq t \leqq 3$ で場合分けをする。

<u>$0 \leq t \leq 2$ のとき</u>

線分AB と平面 $z=t$ との交点をP，線分CB と平面 $z=t$ との交点をQ とする。





上図より，点 P は線分 AB を $(2-t):t$ に内分し，点 Q は線分 CB を $(3-t):t$ に内分する。

よって，内分の公式より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{t\overrightarrow{OA}+(2-t)\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{t(2,0,2)+(2-t)(1,1,0)}{2}=\left(\frac{2+t}{2},\ \frac{2-t}{2},\ t\right)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{t\overrightarrow{OC}+(3-t)\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{t(0,0,3)+(3-t)(1,1,0)}{3}=\left(\frac{3-t}{3},\ \frac{3-t}{3},\ t\right)$$

ここで，求める体積は z 軸による回転体であるから，平面 $z=t$ の点 $\mathrm{O'}(0,0,t)$ を考える。

$(0,0,t)$ と点P，Q との距離はそれぞれ

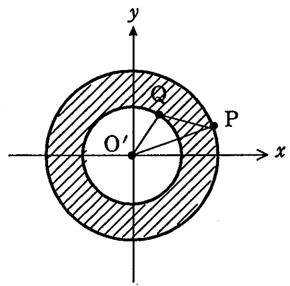
$$\mathrm{O'P}=\sqrt{\left(\frac{2+t}{2}\right)^2+\left(\frac{2-t}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4+4t+t^2+4-4t+t^2}{4}}=\sqrt{\frac{2t^2+8}{4}}=\sqrt{\frac{t^2+4}{2}}$$

$$\mathrm{O'Q}=\sqrt{\left(\frac{3-t}{3}\right)^2+\left(\frac{3-t}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9-6t+t^2+9-6t+t^2}{9}}=\sqrt{\frac{2t^2-12t+18}{9}}$$

2乗をして大小の比較をする。

$(\mathrm{O'P})^2-(\mathrm{O'Q})^2=\dfrac{t^2+4}{2}-\dfrac{2t^2-12t+18}{9}=\dfrac{5t^2}{18}+\dfrac{4}{3}t \geqq 0$ であるから，線分PQ上において点 O′から最も遠い点は P，最も近い点は Qである。

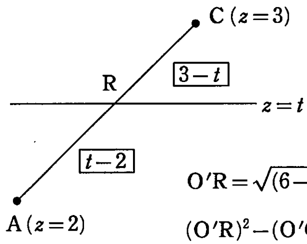
断面積を $S(t)$ とすると，$S(t)$ は右図の斜線部の面積であるから，



$$S(t)=\pi\{(\mathrm{O'P})^2-(\mathrm{O'Q})^2\}=\pi\left(\frac{5t^2}{18}+\frac{4}{3}t\right)$$

<u>$2 \leq t \leq 3$ のとき</u>

線分CA と平面 $z=t$ との交点を R とする。



左図より，点 R は線分 CA を $(3-t):(t-2)$ に内分するので，同様に，

$$\overrightarrow{OR}=(3-t)\overrightarrow{OA}+(t-2)\overrightarrow{OC}$$
$$=(3-t)(2,0,2)+(t-2)(0,0,3)=(6-2t,\ 0,\ t)$$

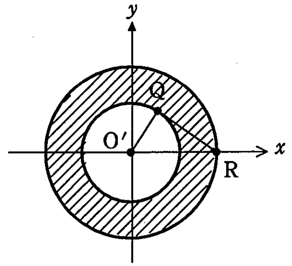
$\mathrm{O'R}=\sqrt{(6-2t)^2}=\sqrt{4t^2-24t+36}$ であり，

$$(\mathrm{O'R})^2-(\mathrm{O'Q})^2=(4t^2-24t+36)-\left(\frac{2t^2-12t+18}{9}\right)$$
$$=\frac{36t^2-216t+324-2t^2+12t-18}{9}=\frac{34t^2-204t+306}{9}$$
$$=\frac{34(t^2-6t+9)}{9}=\frac{34}{9}(t-3)^2 \geqq 0$$

よって，線分 QR 上において点 O′から最も遠い点は R，最も近い点は Q である。

$S(t)$ は右図の斜線部の面積で

あるから，



$$S(t)=\pi\{(\mathrm{O'R})^2-(\mathrm{O'Q})^2\}=\frac{34}{9}\pi(t-3)^2$$

以上より，求める回転体の体積は

$$\int_0^3 S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^3 S(t)dt$$

$$=\pi\int_0^2\left(\frac{5t^2}{18}+\frac{4}{3}\right)dt+\pi\int_2^3\frac{34}{9}(t-3)^2dt$$

$$=\pi\left[\frac{5t^3}{54}+\frac{4}{3}t\right]_0^2+\frac{34}{27}\pi\left[(t-3)^3\right]_2^3=\pi\left(\frac{20}{27}+\frac{8}{3}\right)+\frac{34}{27}\pi=\frac{20+72+34}{27}\pi=\frac{126}{27}\pi$$

$$=\frac{14}{3}\pi\ \cdots\cdots 答$$

ポイント

私立医学部の入試としては「難易度の高い問題」の部類に入ると思います。

① 回転軸に垂直な平面で切る。
② 切り口が線分となったとき，その線分を回転して作られる断面図は，回転軸から最も遠い点を回転した円と，最も近い点で回転した円で囲まれた部分である。

以上が基本的な流れとなります。ただ，過去の私立医学部において，上記のテーマが出題されているかを調べてみたのですが，今のところは見当たりませんでした。

このテーマは国公立大学を志望する受験生は，必ず押さえておくべきテーマになりますので，国公立大学を併願する人と私立専願の人では，試験当日でも部分点に差が出る可能性があります（愛知医科大学になると，国公立大学と併願する受験生の割合も比較的多いと思われます）。

MEDiCでは「国公立医学部スーパー特進クラス」・「国公立私立医学部選抜クラス」において上記のテーマを扱っていました。

MEDiC テキスト（S 特クラス：数Ⅲ　後期　第 7・8 講）

xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。
(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)\ (0\leqq u\leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。
(2) 曲面 S を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

MEDiC テキスト（国私選クラス：数Ⅲ　後期　第 7・8 講）

xyz 空間内の平面 $y=1$ 上で $(x-1)^2+z^2\leqq 1$，$y=1$ で表される図形を D とする。D を z 軸の周りに一回転させてできる立体を M とする。立体 M の体積を求めよ。

次は昭和大学の入試問題になります。

2012年度：昭和大学（大問 $\boxed{4}$）生徒から聞き取り

> 2つのグラフ $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y(y-\sqrt{3})$ がある。
> (1) 交点の座標を求めよ。
> (2) 2つのグラフで囲まれた面積を求めよ。

(1)

解説１

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\cdots$①，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y(y-\sqrt{3})\cdots$②

①−②より，

$$y-x=\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2-\sqrt{3}x)-\frac{1}{\sqrt{3}}(y^2-\sqrt{3}y)$$

$$y-x=\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2-y^2)-x+y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y)(x-y)-(x-y)$$

$-\sqrt{3}(x-y)=(x+y)(x-y)-\sqrt{3}(x-y)$ より，$(x+y)(x-y)=0$

(i) $x+y=0$　すなわち，$y=-x$ のとき

①に代入して，$-x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})$

$-\sqrt{3}x=x^2-\sqrt{3}x$ より，$x^2=0$　よって，$x=0$　①に代入して，$y=0$

$x=0$，$y=0$ は②も満たしているので，$(x,y)=(0,0)$

(ii) $x-y=0$　すなわち，$y=x$ のとき

①に代入して，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})$

$\sqrt{3}x=x^2-\sqrt{3}x$ より，$x^2-2\sqrt{3}x=0$　　$x(x-2\sqrt{3})=0$ であるから，$x=0,\ 2\sqrt{3}$

①に代入して，$(x,y)=(0,0)$，$(2\sqrt{3},2\sqrt{3})$　これらの値は②も満たしている。

以上，(i)，(ii)より，交点の座標は $(0,0)$，$(2\sqrt{3},2\sqrt{3})$ である。……答

解説２

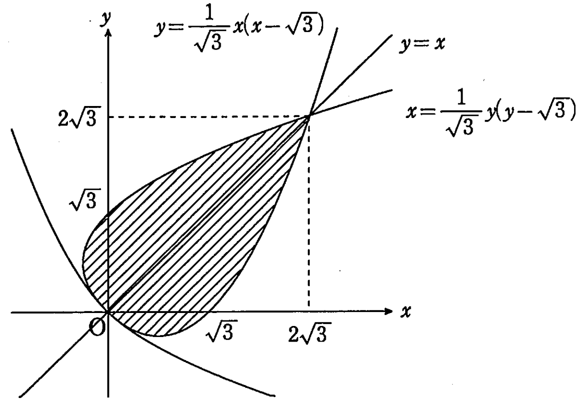
$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\cdots$①，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y(y-\sqrt{3})\cdots$②

①，②式より，2つのグラフは逆関数であるから，①と②は $y=x$ に関して対称である。
よって，①のグラフと $y=x$ との共有点を求めればよい。

$y=x$ を①に代入して，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})$

$\sqrt{3}x=x(x-\sqrt{3})$ より，$x^2-2\sqrt{3}x=0$　→以降は 解説１ の(ii)と同様である。

(2)



解説２ の続きとして

グラフを図示すると，上図のようになる。よって，求める面積は $y=x$ と $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})$ で囲まれた部分の面積を2倍すればよい。

面積を S とすると，

$$S=2\times\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{x-\frac{1}{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\right\}dx$$

$$=2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2+x\right)dx=2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2+2x\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3\sqrt{3}}x^3+x^2\right]_0^{2\sqrt{3}}=2\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\times24\sqrt{3}+12\right)=2(-8+12)=8\text{……答}$$

参考　$\dfrac{1}{6}$公式を用いてもよい。

ポイント

(1)において，解説１・解説２ のどちらの解法で用いたかによって，(2)の出来が大きく異なります。教える立場としては，2つのグラフの式を見て「逆関数」と容易に気づきますが，我々が思っているほど受験生の皆さんは気づかないのか実情です。逆関数に気づかなかった人は，(2)で正解を出すのは少し困難だったと思います。

昨年に続いて，今年も教務スタッフが生徒達に「数学の課題」を日々課していました。課題は教務スタッフが添削をおこない，個々の生徒の状況把握に努めました。これまでの生徒指導を通じて，逆関数（対称性）についての認識が弱いことを把握していましたので，今年の課題に「対称性をテーマにした問題」も入れていました。

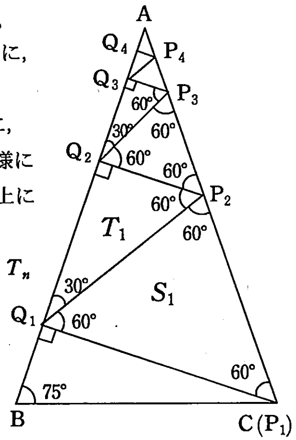
日々の演習（国私選Ａクラス：9月16日）

a を正の定数とし，2つの放物線 $ay=x^2$ と $ax=y^2$ について考える。
(1)　2つの放物線の交点の座標を求めよ。
(2)　2つの放物線で囲まれた部分の面積が4であるときの，a の値を求めよ。

続いては近畿大学の問題を御紹介します。

2012年度：近畿大学（大問[2]）

$\angle A=30^\circ$，$AB=AC=4$ を満たす $\triangle ABC$ において，点Cを点 P_1 として，$\triangle P_1Q_1P_2$ が正三角形になるように，辺AB上に点 Q_1，辺AC上に点 P_2 をとる。
次に，図のように，$\triangle P_2Q_2P_3$ が正三角形になるように，辺AB上に点 Q_2，辺AC上に点 P_3 をとる。以下，同様にして，$\triangle P_nQ_nP_{n+1}$ が正三角形になるように，辺AB上に点 Q_n，辺AC上に点 P_{n+1} をとる。$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$
$\triangle P_nQ_nP_{n+1}$ の面積を S_n，$\triangle Q_nP_{n+1}Q_{n+1}$ の面積を T_n とする。



(1)　BCと P_1P_2 の長さを，二重根号を用いない形で求めよ。
(2)　S_1，T_1 の値を求めよ。
(3)　S_n を n を用いて表せ。また，$S_n<\dfrac{1}{1000}$ を満たす最小の n を求めよ。
(4)　T_n を n を用いて表せ。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}T_n$ の値を求めよ。

注意
実際の問題において角度は図に記入されていない（解説として記入をしています）。

解説

(1)　$\triangle ABC$ において余弦定理より，

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 30^\circ$$
$$=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=32-16\sqrt{3}$$

$BC>0$ より，$BC=\sqrt{32-16\sqrt{3}}=\sqrt{32-2\sqrt{192}}=\sqrt{(\sqrt{24}-\sqrt{8})^2}$
$=|\sqrt{24}-\sqrt{8}|=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$　……答

また，$\triangle AP_1Q_1$ において $P_1Q_1:AP_1=1:2$ であるから，$P_1Q_1=2$

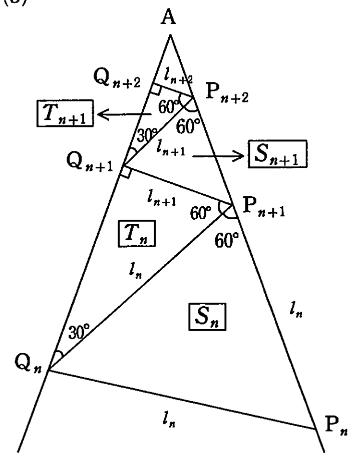
よって，$P_1P_2=P_1Q_1=2$……答

(2)　S_1 は $\triangle P_1Q_1P_2$ の面積であり，(1)より1辺の長さが2の正三角形であるから，

$$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\text{……答}$$

また，T_1 は図より，$P_2Q_2:P_2Q_1:Q_1Q_2=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であり，P_2Q_1 の長さが2であるから，$T_1=1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……答

(3)



$\triangle P_nQ_nP_{n+1}$ の1辺の長さを l_n
$\triangle P_{n+1}Q_{n+1}P_{n+2}$ の1辺の長さを l_{n+1} とすると，
$\triangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1}$ において，

$l_{n+1}:l_n=1:2$ より，$l_{n+1}=\dfrac{1}{2}l_n$…①

$$S_n=\frac{1}{2}\times l_n\times l_n\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n{}^2\cdots②$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}\times l_{n+1}\times l_{n+1}\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}l_{n+1}{}^2\cdots③$$

①，②，③より，

$$S_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{2}l_n\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}l_n{}^2=\frac{1}{4}S_n\cdots④$$

また，$S_1=\sqrt{3}$…⑤であるから，

④，⑤より，$S_n=\sqrt{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$…答

$S_n<\dfrac{1}{1000}\Leftrightarrow\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{1000}$ であるとき，

<u>$n=6$ のとき</u>

（左辺）$=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{4^5}=\dfrac{\sqrt{3}}{1024}\fallingdotseq0.0016$……　（右辺）$=0.001$ より，不適。

<u>$n=7$ のとき</u>

（左辺）$=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{4^6}=\dfrac{\sqrt{3}}{4096}$ より，（左辺）<（右辺）となる。

よって，$S_n<\dfrac{1}{1000}$ を満たす最小の n は<u>7</u>である。……答

(4)　(3)の図より，$T_n=\dfrac{1}{2}\times l_n\times l_{n+1}\times\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}l_n\cdot l_{n+1}$…⑥

$$T_{n+1}=\frac{1}{2}\times l_{n+1}\times l_{n+2}\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}l_{n+1}\cdot l_{n+2}\cdots⑦$$

また，$l_{n+2}:l_{n+1}=1:2$ より，$l_{n+2}=\dfrac{1}{2}l_{n+1}$…⑧

①，⑥，⑦，⑧より，

$$T_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_{n+1}\cdot l_{n+2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}l_n\cdot\frac{1}{2}l_{n+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l_n\cdot l_{n+1}=\frac{1}{4}T_n$$

また，$T_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$T_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ……圏

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}T_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{1024}\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1023}{1024}\times\frac{4}{3}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{341}{256}=\frac{341\sqrt{3}}{512}\ \text{……圏}$$

ポイント

入試数学では頻出の「図形列」の問題になります。「図形列」については，数Ｂの「数列」・数Ⅲの「数列の極限」において頻繁に取り上げました。「図形列」でポイントになるのは(3)，(4)のような問題です。

S_n と T_n を式で表すときに，解説 のように n と $n+1$ の関係から答案を書ける人が，毎年のことですが少ないです。多くの生徒は「S_1 と S_2（T_1 と T_2）」を求めて，「図形列は等比数列だから，初項と公比を求めて一般項を出す」という手順を踏むことが多いです。マーク形式・穴埋め形式の問題ではその解法でも大丈夫ですが，記述式では確実に減点となります。MEDiC で生徒達に演習をしてもらったときも，「n と $n+1$ の関係から答案を書くこと」を徹底させました。

日々の演習（国私選Ａクラス：5月10日）

1辺の長さが a の正方形がある。この正方形の各辺を 3 : 1 の比に内分する点をとり，それらを結んで新しい正方形を作るという操作を繰り返して行うとする。

(1) 1回目の操作を行ったときにできる正方形の1辺の長さを求めよ。

(2) n 回目の操作を行ったときにできる正方形の面積 S_n を表す式を求めよ。

(3) S_n がもとの正方形の面積の $\frac{1}{20}$ 以下になるためには，この操作を少なくとも何回行う必要があるか求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3$ とする。

MEDiC テキスト（国私選クラス：数Ⅲ　後期　第1・2講）

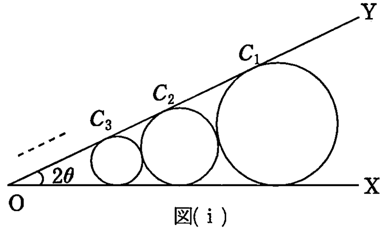
点Ｏを端点とする半直線 OX，OY のなす角を $2\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。次の条件(A)，(B)を満たす円の列 C_1，C_2，C_3，…，C_n，…を作り，その面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3，S_n，…とする。

(A) C_1 は OX，OY に接し半径は1である。

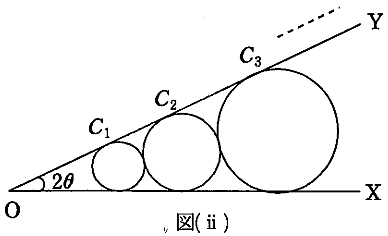
(B) 各自然数 n に対して，C_{n+1} は OX，OY 及び C_n に接する。

(1) 図(i)のように円の列 $\{C_n\}$ をとるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$ を求めよ。

(2) 図(ii)のように円の列 $\{C_n\}$ をとるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9^n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ が0以外の実数値になるように θ の値を定めよ。



図(i)



図(ii)

それでは，最後に本年度の入試問題を用いて「高等進学塾グループの指導の一端」を御紹介します。

2012年度：昭和大学（大問$\boxed{3}$）生徒から聞き取り

> 正の数 a，b が $a^3+b^3=5$ を満たしているとき，$a+b$ のとりうる範囲を求めよ。

今年の昭和大学の入試問題になります。まず，授業において「最大・最小」を扱うときに，次のような「攻略法」を全員の生徒に提示します。

最大値・最小値の攻略法

1変数関数

- ① グラフを利用する。
  - 文字定数あれば、場合分け
    1. 区間と極大・極小の位置で分ける。
    2. 端点と極大値・極小値の大小で分ける。
- ② 有名不等式を利用する。
  - 逆数の和の最小値は相加・相乗平均を用いる。
- ③ $=k$と置いて，kの範囲を調べる。

変数が減る（多変数関数 → 1変数関数）

- ○等式の条件から変数を減らす。
- ○置換して変数を減らす。

多変数関数

変数が減らない

- ① $=k$と置いて，kの範囲を調べる。
  - ☆ k以外の文字の存在条件を考える。
- ② 有名不等式の利用。
  - 相加・相乗平均，コーシー・シュワルツの不等式・三角不等式
- ③ 予選・決勝法（文字固定）
  - 動くもの（文字）が2つ以上あるから，いくつかを固定して1変数関数と考える。

まずは，関数の確認を行います。この問題は正の数を取りながら a，b が変化するので，「多変数関数」になります。その次は，攻略法に従って「変数が消去できるか？」を確認してみると，与えられた等式（$a^3+b^3=5$）から $f(a,b)=a+b$ を消去するのは容易ではありません。よって，多変数関数で変数が減らないパターンになります。ここでは，「$=k$と置いて，kの範囲を調べる」という解法をとります。

解説

$a+b=k$ とおく。ここで，$a>0$，$b>0$ であるから，$k>0$…① となる。

また，$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ より，

$5=k^3-3kab$　よって，$ab=\dfrac{k^3-5}{3k}$

よって，$a+b=k$，$ab=\dfrac{k^3-5}{3k}$ より，$x=a$，b を解に持つ x の2次方程式は

$$x^2-kx+\frac{k^3-5}{3k}=0\cdots②$$

と表される。② の解が $x=a$，b（$a>0$，$b>0$）より，2つの正の実数解を持てばよい。

その条件は，②の方程式において，判別式：$D\geqq 0$　かつ　$ab>0$ を満たせばよい。

> **参考**　①より，$a+b>0$ を満たしているので，下線部の条件のみでよい。

$D\geqq 0$ より，$D=(-k)^2-4\cdot\dfrac{k^3-5}{3k}=k^2-\dfrac{4(k^3-5)}{3k}\geqq 0$

①より，$3k^3-4(k^3-5)\geqq 0 \Leftrightarrow k^3-20\leqq 0$　よって，①より $0<k\leqq\sqrt[3]{20}$…③

また，$ab>0$ より，解と係数の関係から $\dfrac{k^3-5}{3k}>0$

①より，$k^3-5>0$　よって，$k>\sqrt[3]{5}$ …④

よって，③，④ より $\sqrt[3]{5}<k\leqq\sqrt[3]{20}$ から，$\sqrt[3]{5}<a+b\leqq\sqrt[3]{20}$ である。…答

MEDiC の数学の特徴として，各テーマごとに存在する「攻略法」を最初に確認していきます。そして，授業中の演習においては，その攻略法に従って解いていくことに重点を置いています。1年間の授業で生徒に提示する攻略法はたくさんありますが，我流の方法で解くのではなく，忠実に攻略法に従って解いていくことが入試で合格点をとるためには大事なことだと考えています。

次の問題を見てください。ここでは，攻略法の確認をしていきましょう。

> x，y，z は実数で
> $x+2y+3z=1$，$xy+yx+zx=-1$ のとき，$x+y+z$ の最大値・最小値を求めよ。

まずは，x，y，z が変化しますので「多変数関数」となります。次に，変数を消去して1変数化できるかを考えると，この問題も1変数化は難しくなります。よって，この問題も多変数関数で変数が減らないパターンになります。また，式を見たときに「有名不等式」が使えるような形でもなさそうです。ということは，「$=k$ と置いて，k の範囲を調べる」または「予選・決勝法（文字固定）」のどちらかになります（この続きは，実際の授業で伝えます）。

高等進学塾グループでは
「以上のような思考プロセスを自分で構築できる」ようにするために，知識を体系化させて問題認識力と解法の運用力を鍛え上げます。

昨年に続いて，今回も数学の問題を用いて，MEDiCの指導について御紹介をさせていただきました。高等進学塾グループ（高等進学塾・医進予備校MEDiC）は数学だけでなく，他の教科においても「独自の指導法」が存在しています。「春期講習会」では，その指導法の一端を受講生の皆様にも御紹介したいと思います。