2025年度 大阪医科薬科大学医学部 入試問題＆解答例 数学

2月10日(月)実施 (解答時間90分)

問 題

[1]

次の問いに答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$$

(2)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。p を 2 以上の整数とするとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}$$

を求めよ。

[2]

xyz 空間において, 原点を通り, ベクトル $\vec{m}=(-6,2,5)$ に平行な直線 l があり, また, 点 $A(-10,0,14)$, $B(8,-1,-3)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 A から直線 l に垂線をおろし l との交点を C, 同様に点 B から直線 l に垂線をおろし l との交点を D とする。C と D の座標を求めよ。また, ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を求めよ。

(2) 4 点 A,B,C,D は同一平面上にないことを示せ。

(3) l 上に動点 P があるとき, 線分の長さの和 $AP+BP$ の最小値と, そのときの点 P の座標を求めよ。

[3]

原点を O とする xy 平面において, 曲線 $C: y=x^2-x+2$ と 直線 $L: y=2x$ で囲まれた図形を Sとする。図形 S の境界に含まれる C 上の各点を P として, 各点 P から L に垂線をおろし, 垂線と L との交点を H とする。線分 PH, 線分 OH の長さをそれぞれ r, h とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を t とするとき, r および h をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 図形 S を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

[4]

(1) n を正の整数とする。二項係数に関する等式

$${}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

(2) コインを 1 枚投げる。投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。表が出れば得点は 1 点とし, 裏が出れば得点は -1 点とする。この試行を 12 回繰り返す。1 回目から k 回目までの合計得点を S_k 点とする。ただし S_1 点は 1 回目の得点である。次の問いに答えよ。

(i) $S_{12}=0$ となる確率を求めよ。

(ii) $S_{12}=0$ であったとき, $S_1, S_2, \cdots, S_{11}$ がすべて負である確率を求めよ。

解 答 例

1

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$$
$$=\int_0^1 x\cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx=\int_0^1\frac{1}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)'dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{\pi}$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^{p-2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=\int_0^1 x\sin(2\pi x)dx$$
$$=\left[-\frac{x}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{4\pi^2}\sin 2\pi x\right]_0^1=-\frac{1}{2\pi}$$

よって, $p=2$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}=-\frac{1}{\pi}$

$p>2$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}=0$ となる。

2

(1) 点C, 点Dは直線 l 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{m}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{m}$ (s, t は実数) と表せる。

よって, $C(-6s,2s,5s)$, $D(-6t,2t,5t)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{m}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}=0$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}=(10-6s,\ 2s,\ 5s-14)\cdot(-6,2,5)=65s-130$

①より $65s-130=0$ よって $s=2$

∴ $C(-12,4,10)$

また, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\perp\vec{m}$ より $\overrightarrow{BD}\cdot\vec{m}=0$ …②

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\vec{m}=(-6t-8,\ 2t+1,\ 5t+3)\cdot(-6,2,5)=65t+65$

②より $65t+65=0$ よって $t=-1$

∴ $D(6,-2,-5)$

(2) 3 点A, B, Cは一直線上にないので,

4 点A, B, C, D が同一平面上にあると仮定すると

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ …③

をみたす実数 α, β が存在する。

③より $(16,-2,-19)=\alpha(18,-1,-17)+\beta(-2,4,-4)$

$(16,-2,-19)=(18\alpha-2\beta,\ -\alpha+4\beta,\ -17\alpha-4\beta)$

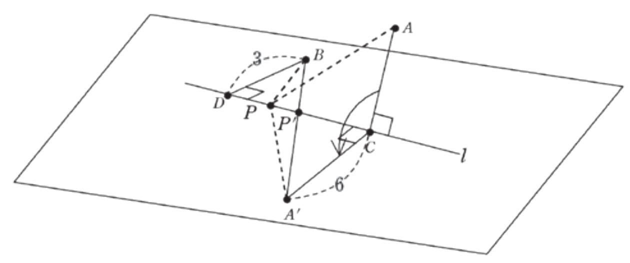
$$\begin{cases}16=18\alpha-2\beta & \cdots④\\ -2=-\alpha+4\beta & \cdots⑤\\ -19=-17\alpha-4\beta & \cdots⑥\end{cases}$$

④⑤を解くと, $\alpha=\frac{6}{7}$, $\beta=-\frac{2}{7}$ となる。

これを⑥に代入すると $-19=-\frac{94}{7}$ となり矛盾する。

④⑤⑥をみたす実数 α, βが存在しないので 4 点A, B, C, D は同一平面上にない。

(3)



上図のように 点Aを直線 l を軸として回転させ, 平面 BCD 上かつ 直線 l に関して点 B と反対側にくるように移動させる。

このとき, $\triangle APC\equiv\triangle A'PC$ から, $AP+BP=A'P+BP$ となる。

そこで, $A'P+BP$ が最小になるのは, A', P, B が一直線になるときである。

このとき, $P=P'$ とすると $\triangle A'CP'\backsim\triangle BDP'$ であり, $A'C:BD=2:1$ より $CP':DP'=2:1$ となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{2(6,-2,-5)+(-12,4,10)}{3}=(0,0,0)$$

P(0, 0, 0)

$AP+BP=A'P+BP\geqq A'B=3P'B=3\sqrt{74}$

∴ $AP+BP$ の最小値 $3\sqrt{74}$

3

$C: y=x^2-x+2$ と $L: y=2x$ の共有点について,

$x^2-x+2=2x$

$x^2-3x+2=0$

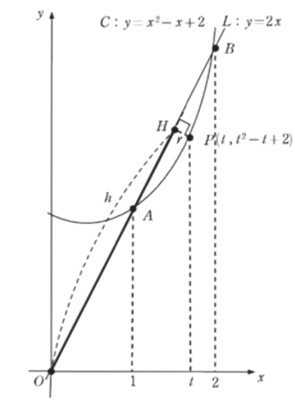
$(x-1)(x-2)=0$

を解いて,

$x=1, 2$

2 つの共有点を A, Bとすると,

A(1, 2), B(2, 4)となる。



(1) $PH=r$ は, 点 $P(t,\ t^2-t+2)$ $(1\leqq t\leqq 2)$ と直線 $L: 2x-y=0$ との距離なので,

$$r=\frac{|2t-(t^2-t+2)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-t^2+3t-2|}{\sqrt{5}}=\frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}$$

$(\because\ -t^2+3t-2=-(t-1)(t-2)\geqq 0)$

いま, 直線 PH の方程式は,

$$y=-\frac{1}{2}(x-t)+t^2-t+2=-\frac{1}{2}x+t^2-\frac{1}{2}t+2$$

すなわち, $x+2y-2t^2+t-4=0$ であり,

$OH=h$ は, 原点 O と, 直線 PH との距離なので,

$$h=\frac{|-2t^2+t-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\because\ -2t^2+t-4=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{31}{8}\leqq 0\right)$$

(2) (1) より, $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{4t-1}{\sqrt{5}}$

$OA=\sqrt{5}$, $OB=2\sqrt{5}$ より,

h	$\sqrt{5}\to 2\sqrt{5}$
t	$1\to 2$

と合わせて,

$$V=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\pi r^2dh=\int_1^2\pi r^2\frac{dh}{dt}dt=\pi\int_1^2\left\{\frac{-(t-1)(t-2)}{\sqrt{5}}\right\}^2\frac{4t-1}{\sqrt{5}}\,dt$$

ここで, $t-1=u$ とおくと, $\dfrac{du}{dt}=1$,

t	$1\to 2$
u	$0\to 1$

なので,

$$V=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1 u^2(u-1)^2(4u+3)\,du$$
$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1(4u^5-5u^4-2u^3+3u^2)\,du$$
$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}u^6-u^5-\frac{1}{2}u^4+u^3\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{5}\,\pi}{150}$$

4

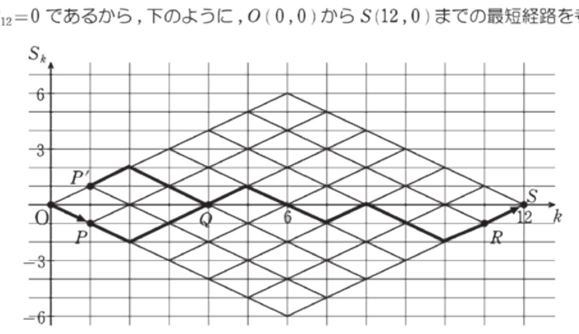
(1)
$${}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$
$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

(2)(i) 表が 6 回, 裏が 6 回出るときであるから,

$${}_{12}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{231}{1024}$$

(ii) 横軸を回数 k, 縦軸を S_k の値とした座標平面を考える。

$S_{12}=0$ であるから, 下のように, $O(0,0)$ から $S(12,0)$ までの最短経路を考える。



このうち, $S_1, S_2, \cdots, S_{11}$ がすべて負であるものを数える。

$S_1<0$ より, 1 回目は裏が出て, 点 O から点 $P(1,-1)$ へと進む。

$S_{11}<0$ より, 12 回目は表が出て, 点$R(11,-1)$ から, 点 S へと進む。

点 P から点 R までの最短経路の個数は, 表が 5 回, 裏が 5 回出ることから, 全部で, ${}_{10}C_5$ 通りある。

このうち, $S_2, S_3, \cdots, S_{10}$ がすべて負となるものは, k 軸と 1 個も共有点を持たず, 点 P から点 R に到達するものである。そこで, 点 P から点 R までの最短経路のうち k 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつものとして, 初めてもつ共有点を点 Q とおくと点 P から点 Q を経由して点 R にいたる経路と, 点 $P'(1,1)$ から点 Q を経由して点 R にいたる経路が 1 対 1 に対応するので, 点 P' から点 R にいたる最短経路数を考えると, これは表が 4 回, 裏が 6 回出ることから, 全部で, ${}_{10}C_4$ 通りある。

これらを除いたものが求める個数である。(1) を用いて,

$${}_{10}C_5-{}_{10}C_4=\frac{{}_{10}C_5}{5+1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=42$$

であるから, 求める条件付き確率は,

$$42\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\div\frac{231}{1024}=\frac{1}{22}$$

●解答例は、医進予備校MEDiCにお願いいたしました。
●問題提供：大阪医科薬科大学医学部　●企画・制作／大阪朝日広告社